数理解析研究所講究録
969 巻 1996 年 157-167

Almost Global Existence of Solution for the Quadratic Semilinear Klein-Gordon Equation in One Space Dimension

東大・数理 利根川 聡 (Satoshi TONEGAWA)

1 導入

以下では、次の非線形クライン・ゴルドン方程式の解の最大存在時間について考える。

$$(\partial_t^2-\triangle+1)u=F(u,u',u''),\ t>0,\ x\in\mathbf{R}^n \tag{1.1}$$

$$u(0,x)=\varepsilon u_0(x),\ \partial_t u(0,x)=\varepsilon u_1(x),\ x\in\mathbf{R}^n. \tag{1.2}$$

ここで、ε は正のパラメータ、F は u 自身およびその 1 階の導関数 (u' で表す)・2 階の導関数 (u'' で表す) に依る C^∞ 級関数で、ある整数 $p\geq 2$ に対し

$$F(u,u',u'')=O(|u|^p+|u'|^p+|u''|^p)\ \text{near}\ (u,u',u'')=(0,0,0) \tag{1.3}$$

を満たすものとする。(1.3) より、(1.1) は自明な解 $u\equiv 0$ をもつ。

現在までに、空間 n 次元, 非線形次数 p の非線形クライン・ゴルドン方程式の初期値問題の解の大域存在や最大存在時間の評価に関して、多くの結果が得られている。n が大きいほどクライン・ゴルドン方程式の基本解は速く減衰するので、十分小さい初期値から始まる解を考える限り、直観的には、n と p が大きいほど解の大域存在を示し易いと考えられる。$p=2$ の場合、まず $n\geq 5$ に対して十分小さい ε に対する大域存在が示され [8],[13]、その後 $n=3,4$ に対しても同様の結果が示された [7],[14]。$n=1,2$ に対しては、解の最大存在時間の下からの評価

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2 T_\varepsilon=\infty\quad (n=1)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log T_\varepsilon=\infty\quad (n=2)$$

が Hörmander によって示され、同時に次の 2 つの予想がたてられていた [5]。

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\log T_\varepsilon>0\quad (n=1) \tag{H1}$$

(H2) 十分小さいεに対し、大域解が存在する。 $(n=2)$

これらのうち (H2) は肯定的に解決されている [11],[12] ((H2) の部分的解決は、[4],[9],[15] などでも行なわれている)。$n=1$ に対しては、あまり結果が得られていないが、$p\geq 4$ ならば十分小さい ε に対して大域存在が示されている [8],[13]。また、$p=3$ の場合、F が u,u',u'' のある特殊な 3 次多項式の線形結合のときには、十分小さい ε に対して大域存在が示されている [6],[10]。

ここでは、空間 1 次元で 2 次の非線形項をもつ半線形クライン・ゴルドン方程式の解の最大存在時間の下からの評価を研究する。まず初めに、いくつかの記号を与えておく。

記号

$$\partial_t=\partial/\partial_t,\quad \partial_x=\partial/\partial_x,\quad L=x\partial_t+t\partial_x,$$

$$\partial=(\partial_t,\partial_x)$$

とおき、 $\Gamma = (\Gamma_j)_{j=1}^3 = (\partial_t, \partial_x, L)$ でポワンカレ群の生成元を表す。多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ に対して $\Gamma^\alpha = \Gamma_1^{\alpha_1}\Gamma_2^{\alpha_2}\Gamma_3^{\alpha_3}$ とおく。$1 \le p \le \infty$ に対して L^p で $\mathbf{R}$ 上の通常の L^p 空間を表す。$\mathbf{R}$ 上の重み付きソボレフ空間 $H^{m,s}$ を次のように定義する。

$$H^{m,s} = \left\{ v \in L^2 : \langle x \rangle^s \omega^m v \in L^2 \right\},$$

ここで、$\omega = (1 - \partial_x^2)^{1/2}$、$\langle x \rangle = (1 + x^2)^{1/2} (x \in \mathbf{R})$ とおいた。また、この空間のノルムは

$$\|v\|_{H^{m,s}} = \|\langle x \rangle^s \omega^m v\|_{L^2}$$

とする。$f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ および $K \in \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$ に対し、フーリエ変換を

$$\hat{f}(p) = \int e^{-ixp} f(x) dx,$$

$$\widehat{K}(p,q) = \iint e^{-i(yp+zq)} K(y,z) dy dz$$

で定義する ($\mathcal{S}$ はシュワルツの急減少関数の空間を表す) 。$k \in \mathbf{N}$ に対して、次のようなノルムを用意する。

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &= \|u(t,\cdot)\|_{L^2}, \\
|u(t)|_\infty &= \|u(t,\cdot)\|_{L^\infty}, \\
\|u(t)\|_k &= \sum_{|\alpha| \le k} \|\Gamma^\alpha u(t)\|, \\
\|u(t)\|_{k,\omega^{-1}} &= \sum_{|\alpha| \le k} \|\omega^{-1}\Gamma^\alpha u(t)\|, \\
|u(t)|_k &= \sum_{|\alpha| \le k} |\Gamma^\alpha u(t)|_\infty, \\
\|u\|_{k,T} &= \sup_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_k, \\
|u|_{k,T} &= \sup_{t \in [0,T], x \in \mathbf{R}} (1 + t + |x|)^{1/2} \sum_{|\alpha| \le k} |\Gamma^\alpha u(t,x)|, \\
|||u|||_{k,T} &= |u|_{k,T} + \|u\|_{k+6,T} + \|\partial u\|_{k+6,T}.
\end{aligned}$$

$(\partial_t, \partial_x, L)$ は次のような交換関係をもつリー環を生成することに注意する。

$$[L, \partial_t] = -\partial_x, \quad [L, \partial_x] = -\partial_t, \quad [\partial_t, \partial_x] = 0. \tag{1.4}$$

以下においては、評価式において必要な定数をいつでも同じ C で表すが、これは、式ごとに変わり得る定数である。

以上の準備のもと、主定理を述べる。

主定理 F は u, u_t, u_x のみに依るとし、また

$$F(u, u_t, u_x) = O(|u|^2 + |u_t|^2 + |u_x|^2) \text{ near } (u, u_t, u_x) = (0,0,0)$$

を満たすとする。もし、ある $k \ge 11$ に対して、 $u_0 \in H^{k+7,k+6}$, $u_1 \in H^{k+6,k+6}$ ならば、(1.1)-(1.2) の局所解 u に対して最大存在時間 T_ε を

$$T_\varepsilon = \sup\left\{ T > 0; |||u|||_{k,T} < \infty \right\},$$

で定義すると、この T_ε について次の評価が成り立つ。

3 つの正定数 ε_0, A, B が存在して

$$T_\varepsilon > A \exp(B\varepsilon^{-2}) \quad \text{for } 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 \tag{1.5}$$

ここで、定数 ε_0, A, B は $k, \|u_0\|_{H^{k+7,k+6}}, \|u_1\|_{H^{k+6,k+6}}$ のみによって決まる。

注意 (i) 実際には、初期値 $u(0,x)$ と $\partial_t u(0,x)$ は、同じオーダーで 0 に近付く必要はない。上記定理の証明には、以下の仮定で十分である。

$$\|u(0,x)\|_{H^{k+7,k+6}} + \|\partial_t u(0,x)\|_{H^{k+6,k+6}} \leq \varepsilon.$$

(ii) 上記定理は、 Hörmander 予想 (H1) を、半線形の場合につき肯定的に解決するものである。しかし、この定理の証明の手法は、準線形の場合に対しては適用できそうでない。
(iii) Yordanov [16] の最近の結果によると、2 次の非線形項 $F = u_t^2 u_x + au^3 + bu^2$ $(a, b \in \mathbf{R})$ および初期値 $u_0, u_1 \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ に対し、もし $\int_{\mathbf{R}} (\partial_x u_0) u_1 dx > 0$ ならば、(1.1)-(1.2) の解は、有限時間内に必ず爆発し、さらに解の最大存在時間について上からの評価：正定数 A, B が存在して $T_\varepsilon \leq A\exp(B\varepsilon^{-2})$、 が成り立つ。従って、下からの評価 (1.5) は、一般に最良である。

2 変換の存在と変換の正則性

この章では、 Shatah [14] の方法に従い、2 次の非線形項 F を 3 次の非線形項に変える変換を得る。変換が得られた後、(1.1)-(1.2) の解のアプリオリ評価の確立に必要な、変換の正則性を示す。
　まず、変換を得る。2 次の非線形項は、次の形をしているものとする。

(2.1)
$$F(u, u_t, u_x) = a_1 u^2 + 2a_2 u u_x + a_3 u_x^2 + 2b_1 u u_t + 2b_2 u_x u_t + c_1 u_t^2$$

新しい未知関数 $v(t, x)$ を次のように定義する。

(2.2)
$$v = u + [u, B_{11}, u] + [u, B_{12}, u_t] + [u_t, B_{21}, u] + [u_t, B_{22}, u_t],$$

ここで、各 B_{ij} は超関数 (distribution) とし、2 次形式 $[\cdot, B_{ij}, \cdot]$ は次のように定義する。

(2.3)
$$[f, B_{ij}, g](x) = \iint f(y) B_{ij}(x-y, x-z) g(z) dydz$$

簡単な計算により、次を得る。

(2.4)
$$\begin{aligned} v_x &= u_x + [u, B_{11}, u_x] + [u_x, B_{11}, u] + [u, B_{12}, u_{tx}] + [u_x, B_{12}, u_t] \\ &\quad + [u_t, B_{21}, u_x] + [u_{tx}, B_{21}, u] + [u_t, B_{22}, u_{tx}] + [u_{tx}, B_{22}, u_t]. \end{aligned}$$

(2.5)
$$\begin{aligned} v_t &= u_t + [u, B_{11}, u_t] + [u_t, B_{11}, u] + [u_t, B_{12}, u_t] + [u_t, B_{12}, -\omega^2 u] \\ &\quad + [u_t, B_{21}, u_t] + [-\omega^2 u, B_{21}, u_t] + [u_t, B_{22}, -\omega^2 u] + [-\omega^2 u, B_{22}, u_t] \\ &\quad + [u, B_{12}, F] + [F, B_{21}, u] + [u_t, B_{22}, F] + [F, B_{22}, u_t], \end{aligned}$$

(2.6)
$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \partial_x^2 + 1)v &= F(u, u_t, u_x) + [u, -(2\partial_1\partial_2 + 1)B_{11} + 2(\partial_1^2 - 1)(\partial_2^2 - 1)B_{22}, u] \\ &\quad + [u, -(2\partial_1\partial_2 + 1)B_{12} + 2(\partial_1^2 - 1)B_{21}, u_t] \\ &\quad + [u_t, -(2\partial_1\partial_2 + 1)B_{21} + 2(\partial_2^2 - 1)B_{12}, u] \\ &\quad + [u_t, -(2\partial_1\partial_2 + 1)B_{22} + 2B_{11}, u_t] + R, \end{aligned}$$

ただし、$\partial_1 B_{ij} = \partial_y B_{ij}(y, z)$, $\partial_2 B_{ij} = \partial_z B_{ij}(y, z)$ とおいた。また、 $R = R(u, u', u'', u_{tt})$ は、3 次以上の項で次の形をもつ。

(2.7)
$$\begin{aligned} R &= [u, B_{11}, F] + [F, B_{11}, u] + [u_t, B_{21}, F] + [F, B_{12}, u_t] + [u, B_{12}, \partial_t F] + [\partial_t F, B_{21}, u] \\ &\quad + [u_t, B_{22}, \partial_t F] + [\partial_t F, B_{22}, u_t] + 2[u_t, B_{12}, F] + 2[F, B_{21}, u_t] \\ &\quad + 2[-\omega^2 u, B_{22}, F] + 2[F, B_{22}, -\omega^2 u] + 2[F, B_{22}, F]. \end{aligned}$$

さてここで、(2.6) の右辺で R を除いた部分の和が 0 となるように B_{ij} を選び、(2.6) の 2 次の項を消す。フーリエ変換をとることにより、次を得る。

$$\begin{aligned}
(2.8)\qquad \widehat{B}_{11}(p,q) &= \frac{1}{det}\Big\{-2(a_3+c_1)p^2q^2+2ia_2pq(p+q)+(2a_1+a_3)pq \\
&\quad -2c_1(p^2+q^2)-ia_2(p+q)-(a_1+2c_1)\Big\}, \\
(2.9)\qquad \widehat{B}_{12}(p,q) &= \frac{1}{det}\Big\{4ib_2p^2q+2b_1p(p+q)-ib_2(p-2q)+b_1\Big\}, \\
(2.10)\qquad \widehat{B}_{21}(p,q) &= \widehat{B}_{12}(q,p), \\
(2.11)\qquad \widehat{B}_{22}(p,q) &= \frac{1}{det}\Big\{2(a_3+c_1)pq-2ia_2(p+q)-(2a_1+c_1)\Big\}.
\end{aligned}$$

ここで、$det=4(p^2+pq+q^2)+3$ とおいた。

以上により、変換 (2.2),(2.8)-(2.11) により定義された新しい未知関数 v は、形式的には 3 次の非線形項をもつ次の方程式を満たす。

$$(2.12)\qquad (\partial_t^2-\partial_x^2+1)v=R(u,u',u'',u_{tt})$$

(2.12) を標準形 (normal form) と呼ぶ。

次に、上で得られた変換の正則性に関するいくつかの命題と補題を与える（初めの 2 つの命題の証明に関しては、[11] を参照せよ）。

命題 2.1 $K\in L^1(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$ とする。このとき、

$$\|[f,K,g]\|_{L^r}\le\|K\|_{L^1(\mathbf{R}\times\mathbf{R})}\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$$

が成り立つ。ここで、$r^{-1}=p^{-1}+q^{-1}$, $1\le p,q,r\le\infty$。

命題 2.2 任意の多重指数 α に対し、次が成立する。

$$\Gamma^\alpha[f,K,g]=\sum_{\substack{|\beta|+|\gamma|\le|\alpha| \\ 0\le m\le|\beta|,0\le n\le|\gamma|}}C^\alpha_{\beta,\gamma,m,n}[\Gamma^\beta f,y^mz^nK,\Gamma^\gamma g]$$

ここで、$C^\alpha_{\beta,\gamma,m,n}$ は多重指数 α,β,γ と非負整数 m,n に依る定数である。

次の補題は、u の減衰評価を標準形 (2.12) から得るときに重要となるものである。

補題 2.1 $a,b=0,1$ とし、m,n は、任意の非負整数とする。このとき、各 B_{ij} に対して次が成立する。

$$(1+y^2)^a(1+z^2)^b\omega_y^{-2}\omega_z^{-2}y^mz^nB_{ij}(y,z)\in L^1(\mathbf{R}\times\mathbf{R}).$$

略証 まず、$K=\omega_y^{-2}\omega_z^{-2}y^mz^nB_{ij}(y,z)$ に対し、$\widehat{K}\in W^{8,2}(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$ を示す。これが示せると、

$$(1+y^2)^{a+1}(1+z^2)^{b+1}K(y,z)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint e^{i(yp+qz)}(1-\partial_p^2)^{a+1}(1-\partial_q^2)^{b+1}\widehat{K}(p,q)dpdq.$$

から $(1+y^2)^{a+1}(1+z^2)^{b+1}K(y,z)\in L^2(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$ がいえる。従って、$(1+y^2)^a(1+z^2)^bK\in L^1(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$ が成立する。 ■

次の補題は、u のエネルギー評価を標準形 (2.12) から得るときに必要となるものである。u のエネルギー評価の導出に直接利用されるのは、すぐ後の命題であるが、その命題の証明は、この補題に依っている（[1] の Proposition 4.1, [2] の Theorem 5 を参照）。

補題 2.2　積分核 K が、次を満たしているとする：$(i,j)=(0,0),(0,1),(1,0)$ に対して正定数 C_{ij} が存在して、

(2.13) $$|\partial_p^i\partial_q^j\widehat{K}(p,q)|\le C_{ij}(p^2+q^2)^{-(i+j)/2}$$

が成り立つ。

このとき、次の（Hölder 型）不等式が成り立つ。

$$\|[f,K,g]\|_{L^r}\le C_{p,q}\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$$

ただし、$r^{-1}=p^{-1}+q^{-1}, p,q>1,\ r<\infty$、また $C_{p,q}$ は f,g には依らない定数。

u のエネルギー評価を標準形 (2.12) から得る際には、次の補題の不等式が重要な役割を果たす。

命題 2.3　k を 4 以上の整数とする。このとき $f,g\in\mathcal{S}(\mathbf{R})$ に対して、次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\|[f,B_{11},g]\|_k &\le C\Big(\|f\|_k|g|_{[\frac{k}{2}]}+|f|_{[\frac{k}{2}]}\|g\|_k\Big)\\ \|[f,B_{12},g]\|_k &\le C\Big(\|f\|_k|g|_{[\frac{k}{2}]}+|f|_{[\frac{k}{2}]}\|g\|_{k,\omega^{-1}}\Big)\\ \|[f,B_{21},g]\|_k &\le C\Big(\|f\|_{k,\omega^{-1}}|g|_{[\frac{k}{2}]}+|f|_{[\frac{k}{2}]}\|g\|_k\Big)\\ \|[f,B_{22},g]\|_k &\le C\Big(\|f\|_{k,\omega^{-1}}|g|_{[\frac{k}{2}]}+|f|_{[\frac{k}{2}]}\|g\|_{k,\omega^{-1}}\Big)\end{aligned}$$

ここで、$[s]$ は s を超えない最大の整数を表す。また、不等式に現れる定数 C は、k および B_{ij} によって決まり、f,g には依らない。

略証

$$\begin{aligned}[f,K,g](x) &= \iint e^{ix(p+q)}\widehat{K}(p,q)\hat{f}(p)\hat{g}(q)dpdq\\ \widehat{\partial_x f}(p) &= ip\hat{f}(p)\end{aligned}$$

に注意しながら、命題 2.2, 補題 2.2を使う。例えば、$\widehat{K}=\dfrac{p^2q^2}{det}$ とおくと、これは (2.13) を満たさない。しかし、(2.13) を満たす $\widehat{K}_{ij}=\dfrac{p^iq^j}{det}$ $(i+j=2)$ を使って、

(2.14) $$\begin{aligned}[\Gamma^\beta f,K,\Gamma^\gamma g] &= -[\partial_x^2\Gamma^\beta f,K_{02},\Gamma^\gamma g]\\ &= -[\partial_x\Gamma^\beta f,K_{11},\partial_x\Gamma^\gamma g]\\ &= -[\Gamma^\beta f,K_{20},\partial_x^2\Gamma^\gamma g],\end{aligned}$$

と書き換えられることなどを利用すれば、

$$\|[f,K,g]\|_k\le C\Big(\|f\|_k|g|_{[\frac{k}{2}]}+|f|_{[\frac{k}{2}]}\|g\|_k\Big)$$

を示すことができる。

各 B_{ij} に対する不等式の証明はもう少し複雑であるが、だいたい上のような方法で行なわれる。 ■

次の命題を与えて、この章を締めくくる。

命題 2.4　$f,g\in\mathcal{S}(\mathbf{R})$ に対して、次の不等式が成立する。

(2.15) $$\|\partial_x f\|_{k,\omega^{-1}}\le C\|f\|_k,$$

(2.16) $$\|fg\|_k\le C\Big(\|f\|_k|g|_{[\frac{k}{2}]}+|f|_{[\frac{k}{2}]}\|g\|_k\Big),$$

(2.17) $$\|fg\|_{k,\omega^{-1}}\le C\Big(\|f\|_{k,\omega^{-1}}|g|_{[\frac{k}{2}]+1}+|f|_{[\frac{k}{2}]+1}\|g\|_{k,\omega^{-1}}\Big),$$

(2.18) $$|fg|_k\le C|f|_k|g|_k.$$

ここで、各定数は k のみによって決まり、f,g には依らない。

略証　交換関係 (1.4) から導かれる等式　$\Gamma^\alpha \partial_x = \partial_x \Gamma^\alpha + \sum_{|\beta|\le|\alpha|} C^\alpha_\beta \Gamma^\beta$　と、積の微分法　$\Gamma^\alpha(fg) = \sum_{|\beta|+|\gamma|\le|\alpha|} C^\alpha_{\beta,\gamma}\Gamma^\beta f \Gamma^\gamma g$、　および、次の関係式

$$\|\omega^{-1}(fg)\| = \|fg\|_{H^{-1}} = \sup_{\substack{\varphi\in H^1 \\ \|\varphi\|_{H^1}=1}} (fg,\varphi)$$

$$(fg,\varphi) = (f, g\varphi) \le \|f\|_{H^{-1}}\|g\varphi\|_{H^1} \le \|f\|_{H^{-1}}\|g\|_{W^{1,\infty}}\|\varphi\|_{H^1}$$

（従って、$\|\omega^{-1}(fg)\| \le \|\omega^{-1}f\|\cdot\|g\|_{W^{1,\infty}}$）を利用する。積の微分法の式では、右辺の積において $\frac{|\alpha|}{2}$ より階数の大きい微分をもつのは、いつでも $\Gamma^\beta f$ と $\Gamma^\gamma g$ のどちらか一方のみであることに注意する。　■

3　主定理の証明

この章では、主定理の証明を行なう。証明は、局所解の存在定理と解のアプリオリ評価を組み合わせて行なわれる。以下では、証明を 4 つの段階に分ける。

第 1 段. 局所解の存在

命題 3.1　方程式 *(1.1)* において、非線形項は u, u_t, u_x のみの関数とする。このとき、初期値 $u_0 \in H^2(\mathbf{R}), u_1 \in H^1(\mathbf{R})$ と 正定数 ε に対して、時間 $T>0$ と $0<t<T$ における方程式 *(1.1)-(1.2)* （ただし $n=1$）の一意解 u が存在する。さらに、この解 u は次を満たす。

$$u \in \bigcap_{j=0}^{2} C^j\Big([0,T]; H^{2-j}\Big)$$

ここで、T は $\|u_0\|_{H^2}, \|u_1\|_{H^1}, \varepsilon$ のみによって決まる。また、$u_0 \in H^{m,m-1}, u_1 \in H^{m-1,m-1} (m\ge 2)$ の場合には、この解 u はさらに次を満たす：任意の多重指数 α ($|\alpha| \le m-1$) に対して

$$\Gamma^\alpha u,\ \partial_t \Gamma^\alpha u,\ \partial_x \Gamma^\alpha u \in C\Big([0,T]; L^2\Big) \tag{3.1}$$

この補題の証明は、縮小写像の原理を使った標準的な方法でなされる（[8],[13] などを参照）。

第 2 段. 減衰評価

ここでは、方程式 (1.1)-(1.2) の解のアプリオリ減衰評価を与える。Georgiev [3] による次の評価を利用する。

補題 3.1　$u(t,x)$ を、次の非斉次線形クライン・ゴルドン方程式の解とする。

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2 + 1)u = f(t,x), \quad t>0,\ x\in\mathbf{R}$$

このとき、以下の評価が成り立つ。

$$\begin{aligned}(1+t+|x|)^{\frac12}|u(t,x)| \ &\le\ C\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|\le 3}\sup_{s\in(0,t)}\varphi_j(s)\|(1+s+|y|)\Gamma^\alpha f(s,y)\|_{L^2(\mathbf{R}_y)} \\ &\quad + C\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|\le 4}\|(1+|y|)^{\frac12}\varphi_j(|y|)\Gamma^\alpha u(0,y)\|_{L^2(\mathbf{R}_y)}\end{aligned}$$

ここで、$\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ は 1 の *Littlewood-Paley* 分解、すなわち次の性質を満たす関数の族である。

$$\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(s) = 1,\ s\ge 0;\ \varphi_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}),\ \varphi_j \ge 0 \quad \textit{for all } j\ge 0;$$

$$\mathrm{supp}\varphi_j = [2^{j-1}, 2^{j+1}] \quad \textit{for } j\ge 1,\ \mathrm{supp}\varphi_0 \cap [0,\infty) = [0,2]$$

この補題に、前章の命題2.1.2.2および補題2.1を組み合わせることで、次の減衰評価を得る。

補題 3.2　時間 $[0,T](T>0)$ において方程式 *(1.1)-(1.2)* の解 u が存在すると仮定する。このとき、解 u は次の評価を満たす。

十分小さい ε に対して

$$|u|_{k,T} \leq C\Big[\varepsilon + \|u\|_{k,T}^2 + \log(2+T)\Big(\|u\|_{k,T}^3 + \|u\|_{k,T}^4\Big)\Big]$$

ここで、C は $k, \|u_0\|_{H^{k+7,k+6}}, \|u_1\|_{H^{k+6,k+6}}$ のみによって決まる定数である。

証明　まず初めに (2.12) から v の評価式を作る。次の交換関係に注意する。

$$[\partial_t^2 - \partial_x^2 + 1, \Gamma] = 0$$

方程式 (2.12) に補題3.1を適用して、次を得る。

$$\begin{aligned}(3.2)\qquad (1+t+|x|)^{\frac{1}{2}}|\Gamma^\alpha u(t,x)| \leq\ & C\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|\lambda|\leq 3}\sup_{s\in(0,t)}\varphi_j(s)\|(1+s+|y|)\Gamma^{\alpha+\lambda}R(s,y)\|_{L^2(\mathbf{R}_y)} \\ &+ C\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{4}\|(1+|y|)^{\frac{1}{2}}\varphi_j(|y|)\partial_x^m\Gamma^\alpha v(0,y)\|_{L^2(\mathbf{R}_y)} \\ &+ C\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|\lambda|\leq 3}\|(1+|y|)^{\frac{3}{2}}\varphi_j(|y|)\Gamma^{\alpha+\lambda}\partial_t v(0,y)\|_{L^2(\mathbf{R}_y)}.\end{aligned}$$

ここで、$u(0,\cdot)\in H^{k+7,k+6}$、$\partial_t u(0,\cdot)\in H^{k+6,k+6}$ ならば、(2.2),(2.5),命題2.1. 2.2,補題2.1を使って、十分小さい ε に対して

$$\begin{aligned}(3.3)\qquad &\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{4}\|(1+|y|)^{\frac{1}{2}}\varphi_j(|y|)\partial_x^m\Gamma^\alpha v(0,y)\|_{L^2(\mathbf{R}_y)} \\ &+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|\lambda|\leq 3}\|(1+|y|)^{\frac{3}{2}}\varphi_j(|y|)\Gamma^{\alpha+\lambda}\partial_t v(0,y)\|_{L^2(\mathbf{R}_y)} \leq C\varepsilon,\quad |\alpha|\leq k\end{aligned}$$

が成り立つことが示される。

次に (3.2) 右辺で R を含む項を評価する。ここでは、(2.7) 右辺の第 11 項のみを評価する（他の項も同様に評価できる）。命題2.2により、

$$\begin{aligned}(3.4)\qquad &\|(1+s+|x|)\Gamma^{\alpha+\lambda}[-\omega^2 u, B_{22}, F]\| \\ \leq\ & C\sum_{\substack{|\beta|+|\gamma|\leq|\alpha+\lambda| \\ 0\leq m\leq|\beta|, 0\leq n\leq|\gamma|}}\|(1+s+|x|)[\Gamma^\beta(-\omega^2 u), y^m z^y B_{22}, \Gamma^\gamma F]\| \\ \leq\ & C\sum_{\substack{|\beta|+|\gamma|\leq|\alpha+\lambda| \\ 0\leq m\leq|\beta|, 0\leq n\leq|\gamma|}}\|(1+s+|x|)[\omega^2\Gamma^\beta(-\omega^2 u), \omega_y^{-2}\omega_z^{-2}y^m z^n B_{22}, \omega^2\Gamma^\gamma F]\|\end{aligned}$$

が成り立つ。$t>0$ に対して不等式

$$(3.5)\qquad 1+s+|x| \leq C\left\{\begin{array}{l}(1+s+|z|)(1+|x-z|^2) \\ (1+s+|y|)^{\frac{1}{2}}(1+s+|z|)^{\frac{1}{2}}(1+|x-y|^2)(1+|x-z|^2).\end{array}\right.$$

が成り立つことに注意する。(3.4),命題 2.1,補題 2.1から

$$(3.6)\qquad \|(1+s+|x|)\Gamma^{\alpha+\lambda}[-\omega^2 u, B_{22}, F]\|$$

$$
\begin{aligned}
&\le C \sum_{\substack{|\beta|+|\gamma|\le k+3\\ 0\le|\beta|\le[\frac{k}{2}]+1}} |(1+s+|x|)^{\frac{1}{2}}\omega^2\Gamma^\beta(-\omega^2 u)|_\infty \|(1+s+|x|)^{\frac{1}{2}}\omega^2\Gamma^\gamma F\| \\
&\quad + C \sum_{\substack{|\beta|+|\gamma|\le k+3\\ 0\le|\gamma|\le[\frac{k}{2}]+2}} \|\omega^2\Gamma^\beta(-\omega^2 u)\|\cdot|(1+s+|x|)\omega^2\Gamma^\gamma F|_\infty \\
&\le C|u|^2_{[\frac{k}{2}]+5,T}\Big(\|u\|_{k+6,T}+\|\partial u\|_{k+6,T}\Big) \\
&\le C|\!|\!|u|\!|\!|^3_{k,T} \quad \text{for } 0\le s\le T,\ |\alpha|\le k
\end{aligned}
$$

を得る。同様にして、次が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
(3.7)\qquad \|(1+s+|x|)\Gamma^{\alpha+\lambda}[F,B_{22},F]\| &\le C|u|^3_{[\frac{k}{2}]+5,T}\Big(\|u\|_{k+6,T}+\|\partial u\|_{k+6,T}\Big) \\
&\le C|\!|\!|u|\!|\!|^4_{k,T} \quad \text{for } 0\le s\le T,\ |\alpha|\le k
\end{aligned}
$$

$T>0$ に対して、ある正定数 C が存在して

$$
\sum_{j=0}^{\infty}\sup_{s\in(0,T)}\varphi_j(s)\le C\log(2+T)
$$

であることから、これと不等式 (3.2),(3.3), (3.6),(3.7) を合わせて、次の不等式を得る。

$$
(3.8)\quad (1+t+|x|)^{\frac{1}{2}}|\Gamma^\alpha v(t,x)|\le C\Big[\varepsilon+\log(2+T)\Big(|\!|\!|u|\!|\!|^3_{k,T}+|\!|\!|u|\!|\!|^4_{k,T}\Big)\Big] \quad \text{for } 0\le s\le T,\ |\alpha|\le k
$$

次に、変換の定義式 (2.2) を通して (3.8) から u の評価式をを得る。ここでは、(2.2) 右辺の最後の項のみを評価する（他の項も同様に評価できる）。命題 2.1,2.2, 補題 2.1 およびソボレフの不等式より、

$$
\begin{aligned}
(3.9)\qquad &(1+t+|x|)^{\frac{1}{2}}|\Gamma^\alpha[\partial_t u,B_{22},\partial_t u]| \\
&\le C\sum_{\substack{|\beta|+|\gamma|\le k\\ 0\le m\le|\beta|,0\le n\le|\gamma|}} |(1+t+|x|)^{\frac{1}{2}}[\omega^2\Gamma^\beta\partial_t u,\omega_y^{-2}\omega_z^{-2}y^m z^n B_{22},\omega^2\Gamma^\gamma\partial_t u]|_\infty \\
&\le C\sum_{|\beta|\le[\frac{k}{2}]}|(1+t+|x|)^{\frac{1}{2}}\omega^2\Gamma^\beta\partial_t u|_\infty\times\sum_{|\gamma|\le k}|\omega^2\Gamma^\gamma\partial_t u|_\infty \\
&\le C|u|_{[\frac{k}{2}]+3,T}\times\sum_{|\gamma|\le k}\|\omega^2\Gamma^\gamma\partial_t u\|_{H^1} \\
&\le C|u|_{[\frac{k}{2}]+3,T}\|u\|_{k+4,T},\quad \text{for } 0\le t\le T,\ |\alpha|\le k,
\end{aligned}
$$

と評価できる。ここでも (3.5) を使った。

以上により、(2.2),(3.8),(3.9) を合わせることで必要な u の減衰評価を得る。 ■

第 3 段. エネルギー評価

次に、(1.1)-(1.2) の解に対するアプリオリ・エネルギー評価を与える。

補題 3.3 時間 $[0,T](T>0)$ において方程式 *(1.1)-(1.2)* の解 u が存在すると仮定する。このとき、解 u は次の評価を満たす。

十分小さい ε に対して

$$
\|u(t)\|_{k+6}+\|\partial u(t)\|_{k+6}\le C\Big[\varepsilon+|\!|\!|u|\!|\!|^2_{k,T}+|\!|\!|u|\!|\!|^3_{k,T}+\log(1+T)\Big(|\!|\!|u|\!|\!|^3_{k,T}+|\!|\!|u|\!|\!|^4_{k,T}\Big)\Big],\quad t\in[0,T]
$$

ここで、C は $k,\|u_0\|_{H^{k+7,k+6}},\|u_1\|_{H^{k+6,k+6}}$ のみによって決まる定数である。

証明 減衰評価を得たときと同様に、まず v を評価する。
(2.2) から、不等式

$$\|v(t)\|_{k+6}+\|\partial v(t)\|_{k+6}\le C\left(\|v(0)\|_{k+6}+\|\partial v(0)\|_{k+6}+\int_0^t\|R(s)\|_{k+6}ds\right) \tag{3.10}$$

を得る。
初めに、$\|R\|_{k+6}$ を評価する。等式

$$\begin{aligned}\partial_t F &= -2b_1u^2-2b_2u\partial_x u+2(a_1-c_1)u\partial_t u+2a_1\partial_t u\partial_x u+2b_1(\partial_t u)^2\\ &\quad +2b_1u\partial_x^2u+2a_2u\partial_{tx}^2u+2a_3\partial_x u\partial_{tx}^2u+2b_2\partial_t u\partial_{tx}^2u+2b_2\partial_x u\partial_x^2u\\ &\quad +2c_1\partial_t u\partial_x^2u+2b_1uF+2b_2\partial_x uF+2c_1\partial_t uF\end{aligned}$$

および (2.1) に (2.16)-(2.18) を適用して次の不等式を得る。

$$\begin{aligned}\|F(t)\|_{k+6} &\le C\Big(\|u(t)\|_{k+6}+\|\partial u(t)\|_{k+6}\Big)|u(t)|_{[\frac{k}{2}]+4}\\ |F(t)|_m &\le C|u(t)|_{m+1}^2\\ \|\partial_t F(t)\|_{k+6,\omega^{-1}} &\le C\Big(\|u(t)\|_{k+6}+\|\partial u(t)\|_{k+6}\Big)\Big(|u(t)|_{[\frac{k}{2}]+6}+|u(t)|_{[\frac{k}{2}]+4}^2\Big)\\ |\partial_t F(t)|_m &\le C\Big(|u(t)|_{m+2}^2+|u(t)|_{m+1}^3\Big)\end{aligned}$$

これらの不等式と (2.15), 命題 2.3を使って (2.7) の全ての項の評価ができる。例えば、次のようである。

$$\begin{aligned}\|[\omega^2u,B_{22},F](t)\|_{k+6} &\le C\Big(\|(\omega^2u)(t)\|_{k+6,\omega^{-1}}|F(t)|_{[\frac{k}{2}]+3}+|(\omega^2u)(t)|_{[\frac{k}{2}]+3}\|F(t)\|_{k+6,\omega^{-1}}\Big) \qquad (3.11)\\ &\le C\Big(\|u(t)\|_{k+6}+\|\partial u(t)\|_{k+6}\Big)|u(t)|_{[\frac{k}{2}]+5}^2\\ \|[\partial_t u,B_{22},\partial_t F](t)\|_{k+6} &\le C\Big(\|\partial_t u(t)\|_{k+6,\omega^{-1}}|\partial_t F(t)|_{[\frac{k}{2}]+3}+|\partial_t u(t)|_{[\frac{k}{2}]+3}\|\partial_t F(t)\|_{k+6,\omega^{-1}}\Big) \qquad (3.12)\\ &\le C\Big(\|u(t)\|_{k+6}+\|\partial u(t)\|_{k+6}\Big)\Big(|u(t)|_{[\frac{k}{2}]+6}^2+|u(t)|_{[\frac{k}{2}]+4}^3\Big)\\ \|[F,B_{22},F](t)\|_{k+6} &\le C\|F(t)\|_{k+6,\omega^{-1}}|F(t)|_{[\frac{k}{2}]+3} \qquad (3.13)\\ &\le C\Big(\|u(t)\|_{k+6}+\|\partial u(t)\|_{k+6}\Big)|u(t)|_{[\frac{k}{2}]+4}^3\end{aligned}$$

(2.7) の右辺の他の項も、同様に評価できる。
さて、$t\in[0,T]$ に対しては、次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbf{R}}|\Gamma^\alpha u(t,x)| &\le \sup_{x\in\mathbf{R}}\left(\frac{1+t+|x|}{1+t}\right)^{\frac12}|\Gamma^\alpha u(t,x)|\\ &= \frac{1}{(1+t)^{\frac12}}\sup_{x\in\mathbf{R}}(1+t+|x|)^{\frac12}|\Gamma^\alpha u(t,x)|\\ &\le \frac{1}{(1+t)^{\frac12}}\sup_{x\in\mathbf{R},t\in[0,T]}(1+t+|x|)^{\frac12}|\Gamma^\alpha u(t,x)|\end{aligned}$$

これより、任意の整数 m に対して

$$|u(t)|_m\le\frac{1}{(1+t)^{\frac12}}|u|_{m,T}\quad \text{for } t\in[0,T] \tag{3.14}$$

を得る。不等式 (3.11)-(3.14) から次の評価が導かれる。

$$\begin{aligned}\|R(t)\|_{k+6} &\le \frac{C}{1+t}\Big(\|u\|_{k+6,T}+\|\partial u\|_{k+6,T}\Big)\Big(|u|_{[\frac{k}{2}]+6,T}^2+|u|_{[\frac{k}{2}]+4,T}^3\Big)\\ &\le \frac{C}{1+t}\Big(|\!|\!|u|\!|\!|_{k,T}^3+|\!|\!|u|\!|\!|_{k,T}^4\Big)\quad \text{for } t\in[0,T]\end{aligned}$$

従って、これを積分して

$$\int_0^T \|R(t)\|_{k+6}dt \le C\log(1+T)\Big(\|\!|u|\!\|_{k,T}^3 + \|\!|u|\!\|_{k,T}^4\Big). \tag{3.15}$$

を得る。

次に $\|u\|_{k+6}$ と $\|v\|_{k+6}$ の関係を確かめる。等式 (2.2),(2.4),(2.5) に命題2.3,2.4を適用して、次の関係を得る：$t \in [0, T]$ に対して、

$$\begin{aligned}
\|v(t)\|_{k+6} + \|\partial v(t)\|_{k+6} &\le \|u(t)\|_{k+6} + \|\partial u(t)\|_{k+6} \\
&\quad + C\Big(\|u(t)\|_{k+6} + \|\partial u(t)\|_{k+6}\Big)\Big(|u(t)|_{[\frac{k}{2}]+2} + |u(t)|^2_{[\frac{k}{2}]+1}\Big)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{k+6} + \|\partial u(t)\|_{k+6} &\le \|v(t)\|_{k+6} + \|\partial v(t)\|_{k+6} \\
&\quad + C\Big(\|u(t)\|_{k+6} + \|\partial u(t)\|_{k+6}\Big)\Big(|u(t)|_{[\frac{k}{2}]+2} + |u(t)|^2_{[\frac{k}{2}]+1}\Big) \\
&\le \|v(t)\|_{k+6} + \|\partial v(t)\|_{k+6} + C\Big(\|\!|u|\!\|_{k,T}^2 + \|\!|u|\!\|_{k,T}^3\Big)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

(3.16) より、十分小さい ε に対して

$$\|v(0)\|_{k+6} + \|\partial v(0)\|_{k+6} \le C\varepsilon \tag{3.18}$$

が成り立つことがわかる。

以上で得られた不等式 (3.10), (3.15), (3.17), (3.18) を合わせると、必要な u のエネルギー評価式が得られる。 ■

第4段. 主定理の証明の完成

補題3.2と3.3より、$[0, T]$ において解が存在する限り

$$\|\!|u|\!\|_{k,T} \le C\Big[\varepsilon + \|\!|u|\!\|_{k,T}^2 + \|\!|u|\!\|_{k,T}^3 + \log(2+T)\Big(\|\!|u|\!\|_{k,T}^3 + \|\!|u|\!\|_{k,T}^4\Big)\Big] \tag{3.19}$$

が十分小さい ε に対して成り立つ（$0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$ に対して成り立つとしよう）。

ここからは、C で (3.19) の定数を表し、A, B は

$$A > 2C, \quad B < \frac{A - 2C}{2A^3C} \tag{3.20}$$

を満たす正定数とする。ここで、T_ε^* を次のように定義する。

$$T_\varepsilon^* = \sup\{T \in (0, T_\varepsilon); \|\!|u|\!\|_{k,T} \le A\varepsilon\}$$

明らかに、$T_\varepsilon^* \le T_\varepsilon$ が成り立つ。

さて、次のように仮定する。

$$\varepsilon^2 \log(2 + T_\varepsilon^*) \le B \tag{3.21}$$

このとき、(3.1),(3.19) から $T \in [0, T_\varepsilon^*)$ に対して

$$\begin{aligned}
\|\!|u|\!\|_{k,T} &\le C\Big[\varepsilon + A^2\varepsilon^2 + A^3\varepsilon^3 + \log(2+T)(A^3\varepsilon^3 + A^4\varepsilon^4)\Big] \\
&\le C\Big[1 + A^2(1 + A\varepsilon)\varepsilon + A^3B(1 + A\varepsilon)\Big]\varepsilon
\end{aligned} \tag{3.22}$$

が成立することがわかる。A, B の条件 (3.20) と不等式 (3.22) からは、次の結果が従う：任意の $T \in [0, T_\varepsilon^*)$ に対し、

$$\varepsilon < \min\left\{1, \frac{A - 2A^3BC - 2C}{2A^2(A + A^2BC + C)}, \varepsilon_1\right\} =: \varepsilon_2$$

の仮定のもと

$$\|u\|_{k,T} < \frac{1}{2}A\varepsilon$$

が成り立つ。しかしこのとき、T_ε^* の定義から $T_\varepsilon^* = T_\varepsilon$ である。この結果と命題3.1から、解 $u(t)$ は時刻 $t = T_\varepsilon$ を超えて存在することになるが、これは T_ε の定義に反する。従って (3.21) は否定され、

$$T_\varepsilon \geq T_\varepsilon^* > \exp(B\varepsilon^{-2}) - 2 \geq \frac{1}{2}\exp(B\varepsilon^{-2})$$

が $\varepsilon \leq \min\{(\frac{B}{\log 4})^{\frac{1}{2}}, \varepsilon_2\} =: \varepsilon_0$ に対して成り立つことが証明された。これで、主定理の証明が完成した。 ■

References

[1] Cohn,S., *Resonance and long time existence for the quadratic semilinear Schrödinger equation*, Comm. Pure Appl. Math. 45(1992), pp.973-1001.

[2] Coifman,R., Meyer,Y., *Non-linear harmonic analysis, operator theory and P.D.E.*, Beijing Lectures in Harmonic Analysis, Princeton University Press, 1986.

[3] Georgiev,V., *Decay estimates for the Klein-Gordon equation*, Comm. Part. Diff. Eqs. 17(1992), pp.1111-1139.

[4] Georgiev,V., Popivanov,P., *Global solution to the two-dimensional Klein-Gordon equation*, Comm. Part. Diff. Eqs. 16(1991), pp.941-995.

[5] Hörmander,L., *Nonlinear hyperbolic differential equations*, Lectures 1986-1987, Lund, 1988:2.

[6] Katayama,S., *A Note on Global Existence of Solutions to Nonlinear Klein-Gordon Equations in One Space Dimension*,

[7] Klainerman,S., *Global existence of small amplitude solutions to nonlinear Klein-Gordon equations in four space-time dimensions*, Comm. Pure Appl. Math. 38, 1985, pp.631-641.

[8] Klainerman,S., Ponce,G., *Global small amplitude solutions to nonlinear evolution equations*, Comm. Pure Appl. Math. 36(1983), pp.133-141.

[9] Kosecki,R., *The unit condition and global existence for a class of nonlinear Klein-Gordon equations*, J. Diff. Eqs. 100(1992), pp.257-268.

[10] Moriyama,K., *Normal forms and global existence of solutions to a class of cubic nonlinear Klein-Gordon equations in one space dimension*, preprint.

[11] Ozawa,T., Tsutaya,K., Tsutsumi,Y., *Global existence and asymptotic behavior of solutions for the Klein-Gordon equations with quadratic nonlinearity in two space dimensions*, to appear in Math. Z.

[12] Ozawa,T., Tsutaya,K., Tsutsumi,Y., *Remarks on the Klein-Gordon equation with quadratic nonlinearity in two space dimensions*, preprint.

[13] Shatah, J., *Global existence of small solutions to nonlinear evolution equations*, J. Diff. Eqs. 46(1982), pp.409-425.

[14] Shatah, J., *Normal Forms and Quadratic Nonlinear Klein-Gordon Equations*, Comm. Pure Appl. Math. 38(1985), pp.685-696.

[15] Simon,J.C.H., Tafflin,A., *The Cauchy Problem for Non-Linear Klein-Gordon Equations*, Commun. Math. Phys. 152(1993), pp.433-478

[16] Yordanov,B., *Blow-up for the one-dimensional Klein-Gordon equation with a cubic nonlinearity*, preprint.